ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Examen Final 25/09/2025

APELLIDO DEL ALUMNO: .... NOMBRE: ....

CORRIGIÓ: .... REVISÓ: ....

T1		T2		P1	P2	P3	P4	CALIFICACIÓN

Todas las respuestas deben ser justificadas adecuadamente para ser tenidas en cuenta.
No resolver el examen en lápiz. Duración del examen: 2 horas
Condición de aprobación (6 puntos): tres ejercicios correctamente resueltos (uno de T1 o T2 y dos de P1, P2, P3 o P4).
Su examen se mostrará una vez corregido.

T1) a. Demuestre la independencia de la trayectoria para integrales de línea.

b. Dado el campo vectorial definido por $\vec{f}(x,y) = (4xy^2 + 1\,, 4x^2y)$, calcule el flujo de $\vec{f}$ a lo largo de la curva parametrizada por $\vec{\gamma}: [0,\pi] \to R^2$ tal que $\vec{\gamma}(t) = (tsen(t), tcos(t))$ orientada con su parametrización natural.

T2) a. Enuncie el teorema de cambio de variables en las integrales dobles.

b. Mediante el cambio de variables definido por la transformación $\vec{\phi}(u,v) = (u + 2v\,, 2u + v)$, la región D del plano (xy) se transforma en la región D^* del plano (uv). Calcule el $Área(D^*)$ si se sabe que $Área(D) = 12$.

P1) Sea $f: R^3 \to R$ tal que $f(x,y,z) = 3x^2 - 5y + 2z$, calcule la derivada direccional $f\,'(\vec{X}_0, \breve{u})$ cuando $\breve{u}$ está orientado hacia el origen de coordenadas y es normal a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en el punto $\vec{X}_0 = (2,1,1)$.

.

P2) Si el campo $\vec{F}(x,y,z) = (x + sen(yz),\ y + sen(xz), 3z + 2)$, calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie abierta S de ecuación $z = 9 - x^2 - y^2\ con\ z \geq 0$ orientada con z^+.

P3) Sea $f: R^2 \to R\,,\ f \in C^1(R^2)$. Calcule aproximadamente $f(1.98\,, 2.01)$ con un polinomio de Taylor de 2º grado si se conoce que $f(2,2) = 5$ es un extremo local y que la matriz jacobiana de $\overrightarrow{\nabla f}$ en el punto (2,2) es $D(\overrightarrow{\nabla f})_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

P4) Calcule la circulación del campo $\vec{f}: R^3 \to R^3 /\ \ f(x,y,z) = (x^2 + z^2,\ x^2\ ,3yz)$ a lo largo de la curva C intersección de $x^2 + y^2 = 9\ \ con\ x + z = 3$. Indique gráficamente la orientación escogida para circular a lo largo de C.

AM2	Final	HOJA Nº 1/3 FECHA 25-9-25

T1 a) Demostrar la independencia de la trayectoria para integrales de línea

La independencia de la trayectoria para integrales de línea se da cuando el campo es vectorial y es conservativo.

Suponiendo $\bar{F}$ campo conservativo $\Rightarrow \exists \varphi \,/\, \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

$C: \bar{\gamma}_{(t)}$, $h_{(t)} = \underset{\text{diferenciable}}{\varphi}(\bar{\gamma}_{(t)}) \longrightarrow h'_{(t)} = \bar{\nabla}\varphi(\bar{\gamma}_{(t)})\,\bar{\gamma}'_{(t)}$

$$\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = \int_C \bar{\nabla}\varphi\,d\bar{l} = \int_C h'_{(t)}\,dt = \varphi(\bar{\gamma}_{(t)})\Big|_a^b = \varphi(\bar{\gamma}_{b}) - \varphi(\bar{\gamma}_{(a)}) =$$

$\bar{A} = \bar{\gamma}_{(a)}$
$\bar{B} = \bar{\gamma}_{(b)}$

$= \varphi(B) - \varphi(A) \rightarrow$ No se usó la parametrización

b) Dado el campo vectorial definido por $\bar{F}_{(x,y)} = (4xy^2+1, 4x^2y)$ calcular la circulación de $\bar{F}$ a lo largo de la curva parametrizada ~~por~~ por $\bar{\gamma}: [0,\pi] \rightarrow \mathbb{R} \,/\, \bar{\gamma}_{(t)} = (t\,\text{sen}(t), t\cos(t))$ orientada con su parametrización natural.

punto inicial: $\bar{A} = \bar{\gamma}(0) = (0,0)$, punto final: $B = \bar{\gamma}_{(\pi)} = (0,-\pi)$

$\bar{A} \neq \bar{B} \Rightarrow$ No es curva cerrada

Analizo si $\bar{F}$ es campo conservativo: $\bar{F} \in C^1$ ✓ $\quad \bar{F} = (P, Q)$

¿Matriz jacobiana simétrica?
$P'_y = 8xy$
$Q'_x = 8xy$
$\Big\} = ✓$ $\underline{\bar{F} \text{ es campo conserv.}}$ $\exists \varphi \,/\, \bar{F} = \bar{\nabla}\varphi$

$\bar{\nabla}\varphi = (4xy^2+1, 4x^2y)$

$$\begin{cases} \varphi'_x = 4xy^2+1 \xrightarrow{\text{integro en } x} \varphi(x,y) = 2x^2y^2 + x + \alpha(y) \\ \varphi'_y = 4x^2y \xrightarrow{\text{integro en } y} \varphi(x,y) = 2x^2y^2 + \beta(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(x,y) = 2x^2y^2 + x + C}$$

$$\int_{C} \bar{F}\,d\bar{l} = \int_A^B \bar{\nabla}\varphi\,d\bar{l} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(0,-\pi) - \varphi(0,0) = 0$$

$$\boxed{\int_C \bar{F}\,d\bar{l} = 0}$$

NOTA

$\boxed{T2}$ a) Enunciar el teorema de cambio de variables en las integrales dobles

D y D^* regiones elementales del plano

$\vec{T}: D \to D^* \; / \; T(D) = D^*$ $\quad \vec{T}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(u,v)\,|J|\,du\,dv$$

donde $|J| = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = |x'_u y'_v - x'_v y'_u|$

b) Mediante el cambio de variables definido por la transformación $\phi(u,v) = (\overset{x}{u+2v}, \overset{y}{2u+v})$, la región D del plano xy se transforme en la región D^* del plano uv

Calcular el área D^* si se sabe que el $\underbrace{\text{área}(D) = 12}$

$x'_u = 1 \qquad x'_v = 2$

$y'_u = 2 \qquad y'_v = 1$ $\qquad \iint_D dx\,dy = 12$

$|J|_D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = |1\times1 - 2\times2| = |-3| = 3 = |J|$

$u\,v \longrightarrow x\,y \to |J| = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{3}$

$$A_D = \iint_{D^*} du\,dv \overset{C.V.}{=} \iint_D |J|\,dx\,dy = \frac{1}{3}\overbrace{\iint_D dx\,dy}^{12} = 4$$

$$\boxed{A_{D^*} = 4}$$

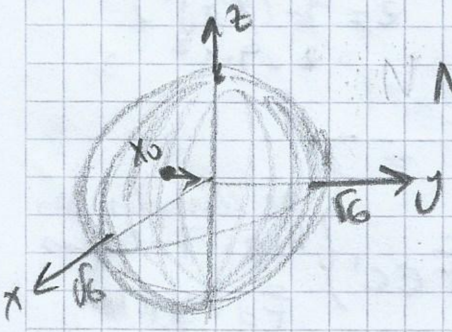
NOTA

AM2	Final	HOJA Nº 2/3 FECHA 25-9-25

(P1) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y,z) = 3x^2 - 5y + 2z$ calcular la derivada direccional $f'(\bar{x}_0, \breve{u})$ cuando $\breve{u}$ está orientado hacia el origen de coordenadas y es normal a la sup de ec. $\underbrace{x^2+y^2+z^2=6}_{S}$ en el punto $\bar{x}_0 = (2,1,1)$.

$f \in C^\infty$ (polinomio) $\Rightarrow$ f es diferenciable $\Rightarrow f'(\bar{x}_0, \breve{u}) = \bar{\nabla} f(\bar{x}_0) \cdot \breve{u}$

$$\left.\begin{array}{l} f'_x = 6x \\ f'_y = -5 \\ f'_z = 2 \end{array}\right\} \bar{\nabla} f(x,y,z) = (6x, -5, 2) \rightarrow \boxed{\bar{\nabla} f(2,1,1) = (12, -5, 2)}$$



$N_S = (x, y, z) \longrightarrow$ apunta al centro $\Rightarrow N = (-x, -y, -z)$

$N_{S\,\bar{x}_0} = (-2, -1, -1)$

$\|N\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$$\boxed{\breve{u} = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)}$$

$$f'((2,1,1), \breve{u}) = \bar{\nabla} f(2,1,1) \cdot \breve{u} = (12, -5, 2)\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{-24+5-2}{\sqrt{6}}$$

$$f'((2,1,1), \breve{u}) = -\frac{21}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{-\overset{7}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{6}}} \sqrt{6} =$$

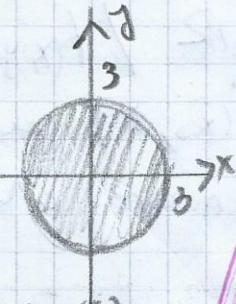
$$\boxed{f'((2,1,1), \breve{u}) = -\frac{7}{2}\sqrt{6}}$$

NOTA

(P2) Si el campo $\bar{F}(x,y,z) = (x + \operatorname{sen}(yz),\ y + \operatorname{sen}(xz),\ 3z+2)$, calcular el flujo de $\bar{F}$ a través de la sup. ABIERTA S de ec. $z = 9 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ orientada con z^+

Grafico S

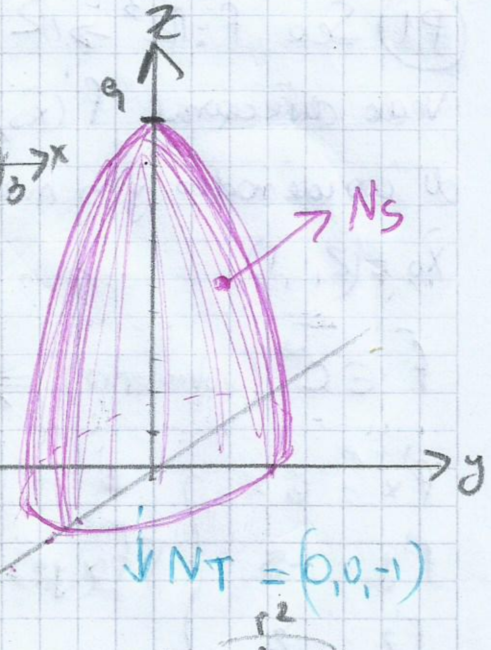
$$\begin{cases} z = 9-(x^2+y^2) \to \text{paraboloide invertido} \\ z \geq 0 \\ N \text{ con } z^+ \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$0 \leq r \leq 3$



Es una sup ABIERTA.

La cierro con un circulo $r=3$ en $z=0$ T

$ST = S \cup T$

$$\iint_{ST} \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} + \iint_T \bar{F}\, d\bar{\sigma} \quad \text{(I)}$$

$$z = 9 - (\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})$$
$$z = 9 - r^2$$

ST es sup cerrada orientada al exterior

W es la región de $\mathbb{R}^3$ encerrada por ST

$\bar{F}$ es suma algebraica de func. elementales $\to \bar{F} \in C^1$

} se cumplen las hip. T-Gauss

$\bar{F} = (P, Q, R)$

$$\Rightarrow \oiint_{ST} \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iiint_W \operatorname{div}(\bar{F})\, d\text{vol} =$$

$\operatorname{div}(\bar{F}) = P'_x + Q'_y + R'_z$

$\operatorname{div}(\bar{F}) = 1 + 1 + 3 = 5$

$$= 5 \iiint_W dx\,dy\,dz =$$

C.V.

$$= 5 \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} r\, dz\,dr\,dt = 5\int_0^{2\pi} dt \int_0^3 r(9-r^2)\, dr =$$

$$= 5 \times 2\pi \cdot \frac{81}{4} = \boxed{\frac{405}{2}\pi = \oiint_{ST} \bar{F}\, d\bar{\sigma}}$$

$$\iint_T \bar{F}\, d\bar{\sigma} \overset{z=0}{=} \iint_D \bar{F}\, N\, dx\,dy = \iint_D (x, y, 2)(0,0,-1)\, dx\,dy = \iint_D -2\, dx\,dy = -2\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{Área } D\ \pi \cdot 3^2}$$

$$\boxed{\iint_T \bar{F}\, d\bar{\sigma} = -18\pi}$$

(I) $\dfrac{405}{2}\pi = \iint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} - 18\pi$

$$\boxed{\iint_S \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \frac{441}{2}\pi}$$

AM2	Final	HOJA N° 3|3 FECHA 29-9-25

(P3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Calcular, aprox, $f(1,98 ; 2.01)$ con un pol. de Taylor de 2° grado si se conoce que $f(2,2) = 5$ es un extremo local y que la matriz jacobiana de $\vec{\nabla} f$ en $(2,2)$ es $D(\vec{\nabla} f)_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Pol. taylor orden 2, en E(2,2)

$$P(x,y) = \underbrace{f(2,2)}_{5 \text{ (enunciado)}} + f'_x(2,2)(x-2) + f'_y(2,2)(y-2) + \frac{1}{2}\left[f''_{xx}(2,2)(x-2)^2 + 2f''_{xy}(2,2)(x-2)(y-2) + f''_{yy}(2,2)(y-2)^2\right]$$

$f(2,2)$ es un extremo local $\Rightarrow \vec{\nabla} f_{(2,2)} = (0,0) \Rightarrow \boxed{f'_x(2,2) = f'_y(2,2) = 0}$

$$D(\vec{\nabla} f)_{(2,2)} = \begin{pmatrix} f''_{xx}(2,2) & f''_{xy}(2,2) \\ f''_{yx}(2,2) & f''_{yy}(2,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} f''_{xx}(2,2) = 3 \\ f''_{xy}(2,2) = 1 \\ f''_{yy}(2,2) = 2 \end{array}$$

$$\boxed{P(x,y) = 5 + \frac{1}{2}\left[3(x-2)^2 + 2(x-2)(y-2) + 2(y-2)^2\right]}$$

$$f(1.98 ; 2.01) \cong P(1.98, 2.01) = \frac{10001}{2000} = 5,0005$$

$$\boxed{f(1,98 ; 2,01) \cong 5,0005}$$

NOTA

P4) Calcular la circ. del campo $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / \bar{f}(x,y,z) = (\overset{P}{x^2+z^2}, \overset{Q}{x^2}, \overset{R}{3yz})$ a lo largo de la curva C intersección de $x^2+y^2=9$ con $x+z=3$

Indicar, gráfic., la orientación escogida para circular a lo largo de C

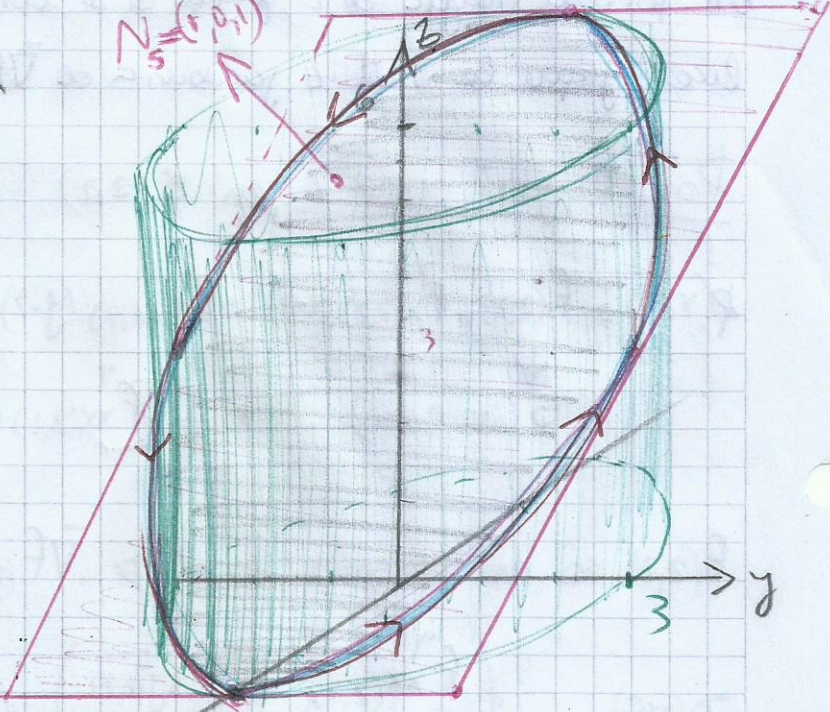
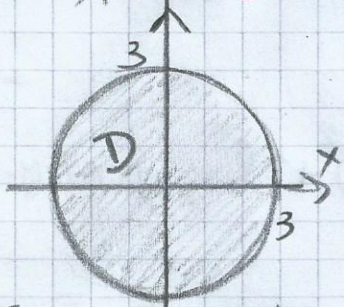


Gráfico C $\to$ curva cerrada

$$C: \begin{cases} x^2+y^2 = 9 \to \text{cilindro } r=3 \\ x+z = 3 \to \text{plano} \end{cases}$$

Proy S:



$0 \leq r \leq 3$

$0 \leq t \leq 2\pi$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\text{sen}(t) \\ z = 3 - r\cos(t) \end{cases}$$

C es cerrada, frontera de S,

S porción del plano $x+z=3 \to N = (1,0,1)$

$\bar{f} \in C^1$ ($\bar{F} = (P,Q,R)$, P, Q y R son polinomios)

$\Rightarrow$ se cumplen las hip. T. Stokes $\therefore$ $\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{f})\, d\bar{s}$

$$\text{rot}(\bar{f}) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y) =$$

$$= (3z - 0,\ 2z - 0,\ 2x - 0) \Rightarrow \boxed{\text{rot}(\bar{f}) = (3z, 2z, 2x)}$$

$$\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = \iint_S \text{rot}(\bar{f})\, d\bar{s} = \iint_{D} \text{rot}(\bar{f})\, N\, dx\,dy = \iint_D (3z, 2z, 2x)(1,0,1)\, dx\,dy =$$

$z = 3-x$

$$= \iint_D 3z + 2x\, dx\,dy = \iint_D 3(3-x) + 2x\, dx\,dy = \iint_D \overbrace{9 - 3x + 2x}^{9-x}\, dx\,dy$$

$$\overset{C.V.}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^3 \overset{\text{Jac}}{r}\,(9 - r\cos(t))\, dr\,dt = \int_0^{2\pi}\int_0^3 9r\, dr\,dt + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^3 -r^2\cos(t)\, dr\,dt}_{0} =$$

$$= 9 \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\, dr\,dt}_{\text{Área D}} = 9 \cdot \pi \cdot 3^2 = 81\pi$$

$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{l} = 81\pi}$$

NOTA